

Глава 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СЖАТО (РАСТЯНУТО) - ИЗОГНУТЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ

3.1. Задачи определения перемещений

Потребность в определении прогибов, углов поворота и относительных смещений различных точек сооружения возникает не только при проверке жесткости и устойчивости конструкций и проектирования их с ограничениями по жесткости, но и при построении методов определения внутренних усилий в статически неопределимых системах.

Рассмотрим способы определения перемещений в стержневых системах, элементы (стержни) которых сжимаются (растягиваются), изгибаются, или сжимаются (растягиваются) и изгибаются одновременно.

Перемещения (углы поворота, взаимные смещения, прогибы) возникают за счет продольных деформаций сжатия (растяжения) и искривления стержней (деформаций изгиба). Практика расчетов и специально поставленных экспериментов показала, что вклад сдвигов, вызываемых поперечной силой при изгибе, в величинах перемещений стержневых систем незначителен и поэтому в инженерных расчетах его обычно не учитывают. Деформация каждой связи (удлинения или укорочения) вносит свой вклад в общее перемещение, и поэтому последнее является суммарной (интегральной) характеристикой деформаций всех связей между частицами материала.

Задача определения перемещений обычно ставится в следующем виде. *Для заданной схемы сооружения и нагрузки определить перемещение заданного вида (углы поворота, взаимные смещения, прогибы и др.) по заданному направлению.*

3.2. Деформации элемента стержня от сжатия (растяжения) и изгиба

Будем рассматривать только те сооружения, в которых перемещения зависят от нагрузки линейно. Для этого необходимо выполнение двух условий. Во-первых, перемещения должны быть малы по сравнению с размерами стержней. Такие перемещения незначительно влияют на

длины стержней и на конфигурацию сооружения в целом. Во-вторых, материал стержней подчиняется линейному закону Гука

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (3.1)$$

где σ - напряжения в стержне, ε - относительное удлинение (деформация), E - модуль Юнга или коэффициент пропорциональности.

Линейно деформируемые стержневые системы позволяют отдельно рассматривать деформации растяжения (сжатия) и изгиба (искривления), а затем если это необходимо, их суммировать. Пусть стержень растягивается (сжимается) постоянной по длине продольной силой (рис. 3.1). Рассмотрим малый элемент этого стержня длиной dz (рис. 3.1,в). Напомним, что в стержнях принята гипотеза Сен-Венана - гипотеза плоских сечений, поэтому связи в одном сечении удлиняются на одну и ту же величину, которую мы назовем удлинением стержня

$$\Delta dz = u + \frac{du}{dz} dz - u = \frac{du}{dz} dz$$

(u - продольное перемещение сечения стержня).

Относительное удлинение $\varepsilon = (\Delta dz)/dz$ или

$$\varepsilon = \frac{du}{dz}. \quad (3.2)$$

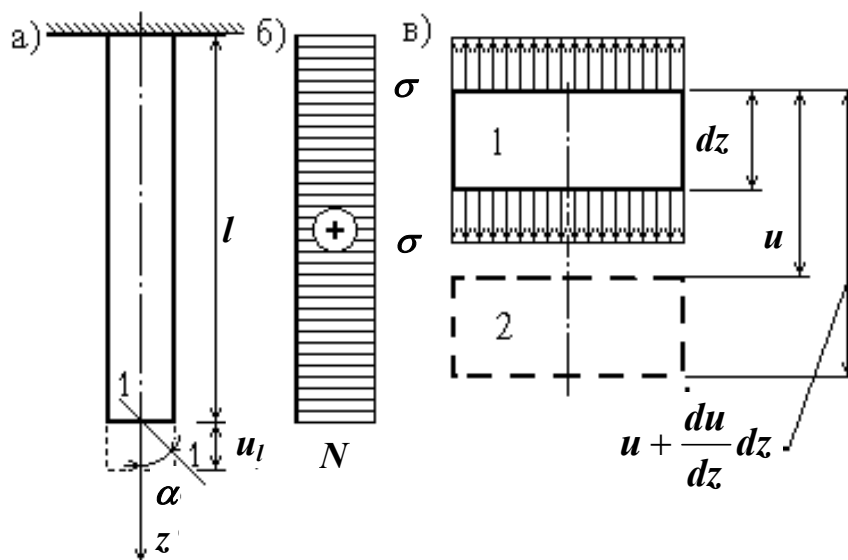


Рис. 3.1.
Растянутый
стержень
а - схема стержня;
б - эпюра
продольных сил;
в - элемент стержня;
1 - положение
элемента до
деформации;
2 - то же после ее

Исходя из закона Гука (3.1)

$$\sigma = E \frac{du}{dz}, \quad (3.3)$$

с учетом гипотезы плоских сечений

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (3.4)$$

где N - продольная сила, A - площадь сечения.

Окончательно для определения перемещения u будем иметь из (3.2), (3.3) и (3.4) дифференциальное уравнение

$$\frac{du}{dz} = \frac{N}{EA} \quad (3.5)$$

с разделяющимися переменными относительно перемещения u .

При изгибе происходит искривление элемента (рис. 3.2). Удлинение волокна на расстоянии y от нейтральной оси (рис. 3.2, в. - при соблюдении гипотезы плоских сечений)

$$\Delta dz = y \frac{d\varphi}{dz} dz, \text{ а деформация } \varepsilon_y = y \frac{d\varphi}{dz} \quad (3.6)$$

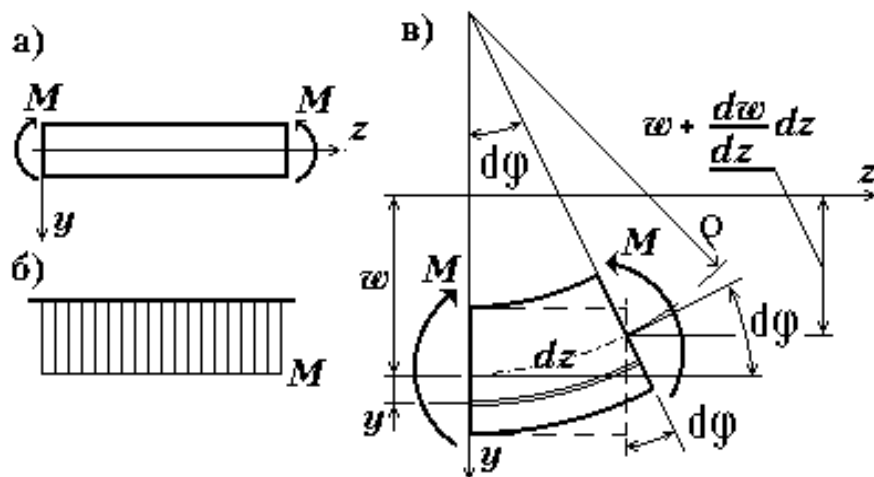


Рис. 3.2.
Изогнутый
стержень
а - схема стержня;
б - эпюра
изгибающих
моментов;
в - элемент стержня.

По закону Гука

$$\sigma_z = Ey \frac{d\varphi}{dz} \quad \text{или} \quad \sigma = \sigma_z = Ey \frac{1}{\rho}, \quad (3.7)$$

так как $dz = \rho \cdot d\varphi$.

Здесь ρ - радиус кривизны стержня, а $1/\rho = \kappa$ - изменение кривизны при изгибе (для прямолинейного стержня $\kappa = 0$). Из

определения интегральной силовой характеристики связи - изгибающего момента (с учетом (3.7)) имеем

$$M = \int_A \sigma_z y \cdot dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{EI_x}{\rho}, \quad (3.8)$$

где I_x - момент инерции сечения относительно нейтральной оси x .

Из формулы (3.8) следует

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}. \quad (3.9)$$

Или, так как $\varphi = dw/dz$ - угол наклона оси стержня к оси z (w - прогиб стержня)

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{M}{EI_x}. \quad (3.10)$$

Таким образом, зависимости (3.9) и (3.10) являются дифференциальными уравнениями относительно угла поворота - φ и прогиба - w . Заметим, что уравнения (3.5) и (3.9) по форме совпадают.

3.3. Перемещения в конструкциях с растянутыми (сжатыми) стержнями

Удлинение растянутого (сжатого) стержня легко подсчитать, решив уравнение (3.5)

$$u = \int_z \frac{N}{EA} dz + C. \quad (3.11)$$

При постоянной площади поперечного сечения и продольной силе перемещение (что часто бывает на практике) стержня равно

$$u = \frac{N}{EA} z + C. \quad (3.12)$$

Постоянную интегрирования C определим из граничного условия: при $z = 0$ перемещение $u = 0$, поэтому $C = 0$. Окончательно имеем

$$u = \frac{N}{EA} z \quad (3.13)$$

перемещение (удлинение) всего стержня ($z = l$)

$$u_l = \frac{N}{EA} l. \quad (3.14)$$

Если требуется определить перемещение конца стержня понаправлению 1-1 (рис. 3.1), то

$$u_{11} = u_l \cdot \cos \alpha \quad (3.15)$$

Рассмотрим стержневые конструкции, в которых стержни работают только на продольную силу. Такие конструкции называют фермами. Пусть дана двухстержневая ферма (рис.3.3), нагруженная силой P в узле A . В стержнях 1 и 2 возникают усилия N_{1P} и N_{2P} . Эти усилия удлиняют (укорачивают) стержни соответственно (см. формулу (3.14)) на величину

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{N_{1P}}{E_1 A_1} l_1, \\ \Delta l_2 &= \frac{N_{2P}}{E_2 A_2} l_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

(Здесь l_1 и l_2 - длины соответствующих стержней).

Отложим их в масштабе по направлению стержней (перемещения малы, поэтому масштабы перемещений и длин не одинаковы). Если стержни разъединить в узле A , то они будут вращаться относительно точек закрепления. Ввиду малости будем считать, что свободные концы перемещаются не по окружностям, а по перпендикулярам к стержням (см. рис. 3.3). На пересечении их получим положение точки A после деформации фермы (на рисунке она обозначена точкой A').

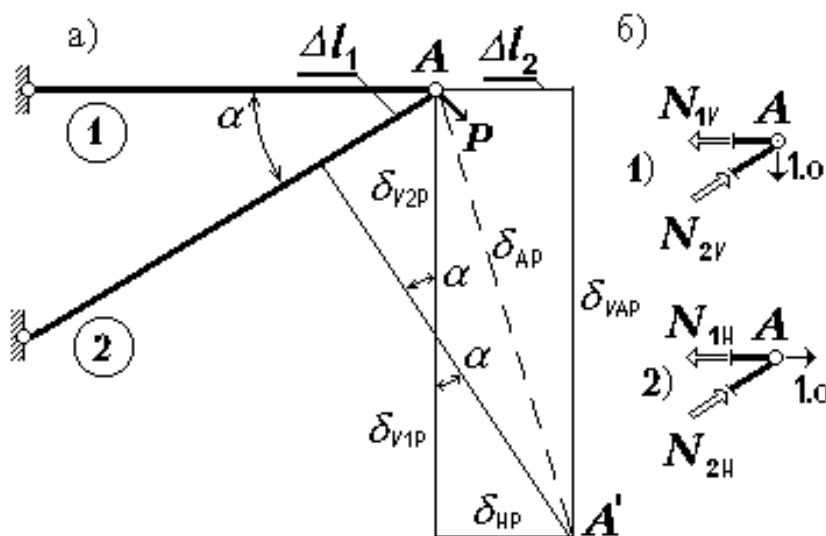


Рис. 3.3.
Ферма из двух стержней
а - схема фермы и перемещения точки A ,
б - усилия от единичной силы вертикального (1) и горизонтального (2) направлений, (в кружках указаны номера стержней).

Из геометрических соображений можно найти вертикальное δ_{VAR} и горизонтальное δ_{HAP} перемещение этой точки

$$\left. \begin{aligned} \delta_{VAR} &= \Delta l_1 \frac{1}{\tan \alpha} + \Delta l_2 \frac{1}{\sin \alpha}, \\ \delta_{HAP} &= \Delta l_1 \cdot 1 + \Delta l_2 \cdot 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

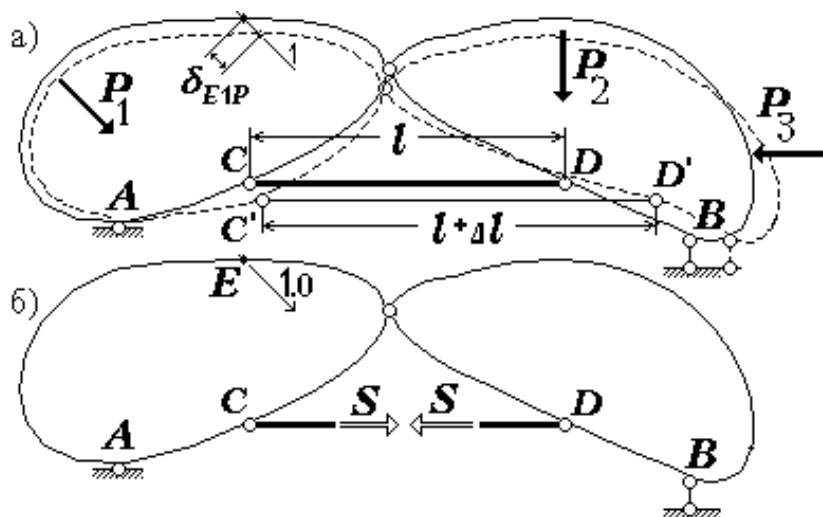
Множители $1/\tan \alpha$, $1/\sin \alpha$, 1 и 0 при удлинениях будем называть коэффициентами влияния (или направляющими коэффициентами) удлинений стержней на соответствующие перемещения.

Графический (геометрический) способ, подобный тому, который использовался нами в примере, долго был единственным при определении коэффициентов влияния и нахождении перемещений. Для сложных систем стержней такие графики носят название диаграмм Виллио (M. Williot, 1843-1889).

Поиски аналитических способов определения коэффициентов влияния ознаменовались открытием Отто Мора¹ (O. Mohr, 1835-1918), который показал, что коэффициенты влияния (направляющие) совпадают по значению с усилиями от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения.

Идея Отто Мора заключалась в следующем. Чтобы найти соотношение между удлинением стержня Δl_{cd} стержня CD и перемещением точки E по направлению 1 (рис. 3.4), устраним сам стержень и заменим его действие двумя равными и противоположно направленными силами S .

Рис. 3.4. К выводу формулы Мора
а - грузовое состояние (состояние P),
б - вспомогательное единичное состояние (состояние 1),
(пунктиром показана деформированная форма системы)



¹ Джеймс Максвелл (J.K. Maxwell, 1831-1879) получил такой же вывод ранее Мора на основании энергетических принципов в более общем виде, но инженеры-практики не обратили на него никакого внимания из-за абстрактности формы изложения.

Считая остальные стержни абсолютно жесткими, получаем кинематическую цепь с одной степенью свободы, подвергающуюся действию единичной силы в направлении искомого перемещения. Поскольку эти силы находятся в равновесии, работа их на любых возможных перемещениях должна равняться нулю. Поэтому

$$S \cdot \Delta l_{cd} + 1 \cdot \delta_{E1P} = 0,$$

откуда получается составляющая искомого перемещения от удлинения только одного стержня

$$\delta_{E1P} = S \cdot \Delta l_{cd},$$

но так как

$$\Delta l_{cd} = \frac{N_{Pcd} \cdot l_{cd}}{EA_{cd}}, \quad (3.18)$$

то само перемещение равно

$$\delta_{E1P} = \frac{N_{Pcd}}{EA_{cd}} \cdot l_{cd} \cdot S. \quad (3.19)$$

Здесь S - усилие от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения, и есть коэффициент влияния удлинения рассматриваемого стержня на искомое перемещение.

Рассматривая влияние удлинения всех стержней фермы на искомое перемещение, получим формулу Мора

$$\delta_{E1P} = \sum_{i=1}^n \frac{N_{Pi} \cdot N_{ik}}{EA_i} \cdot l_i, \quad (3.20)$$

где i - номер стержня ($i = 1, 2, \dots, n$), n - их количество,

N_{Pi} N_{ik} - усилия в соответствующем стержне от внешней нагрузки и от единичной силы, приложенной по направлению искомого перемещения k (немногом ранее оно обозначалось через S).

Таким образом, для определения перемещений в системах, состоящих из стержней, работающих на растяжение и сжатие необходимо найти удлинения (укорочения) каждого из стержней составляющих систему и коэффициенты влияния (направляющие коэффициенты) на значение искомого перемещения. Последние могут быть вычислены как усилия в стержнях от единичной силы, действующей по направлению искомого перемещения. Способ нахождения коэффициентов влияния через усилия будем называть *статическим*. Заметим, что хотя процедура

нахождения коэффициентов не отличается от вычисления усилий, коэффициенты влияния являются функциями углов наклона стержней, то есть безразмерными величинами. Эти коэффициенты не зависят от действующей нагрузки и могут быть определены заранее.

Пример 3.1. Найти статическим способом коэффициенты влияния удлинений стержней на вертикальное перемещение середины нижнего пояса фермы показанной на рисунке 3.5.

Решение. Так как коэффициенты влияния - усилия в стержнях от единичной силы, действующей по направлению искомого перемещения, приложим вертикальную единичную силу к середине нижнего пояса ($k = 1$, рис. 3.5,а). Найдем реакции в опорах фермы (рис. 3.5,б) и методом вырезания узлов вычислим искомые усилия. Из условий равновесия (рис. 3.5,в,г) узлов получим²

$$N_{11} = -0.601, \quad N_{21} = 0.601, \quad N_{31} = 0.601, \quad N_{41} = -0.601, \\ N_{51} = -0.667, \quad N_{61} = 0.333, \quad N_{71} = 0.333.$$

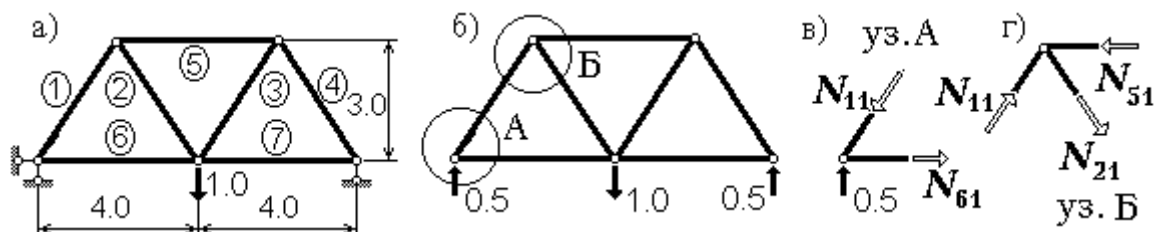


Рис. 3.5. Однопролетная ферма

а - схема фермы с единичной нагрузкой по направлению искомого перемещения,
б - реакции в опорных закреплениях,
в - опорный узел фермы, г - узел верхнего пояса

Пример 3.2. (для самостоятельного решения) Определить перемещение середины нижнего пояса ферма предыдущего примера, если она загружена двумя вертикальными силами в узлах верхнего пояса. Величина сил - 10 кН. Жесткость стержней - EA (кПа·м² = кН) верхнего пояса - 40 кН, нижнего - 10 кН, решетки - 20 кН.

Пример 3.3. Найти величину взаимного сближения точек *A* и *B* арочной фермы (рис. 3.6). Жесткости стержней фермы одинаковы и равны 1200 кН.

Решение. Коэффициенты влияния будем находить статическим способом. Если приложить горизонтальную единичную силу только к

² В обозначении усилий нижний значок состоит из двух чисел: первое соответствует номеру стержня, а второе – номеру нагружения. В нашем случае, например, N_{21} означает усилие во втором стержне от единичного нагружения

точке *A*, то определится ее перемещение по линии *AB*. Если к точке *B*, то только точки *B*. А чтобы найти взаимное смещение приложим две единичных силы одновременно (рис. 3.6, в). Вычисление удлинений (укорочений) стержней по формуле (3.19) и определение перемещений по (3.20) выполним в табличной форме (таблица 3.1). Длины стержней подсчитываются по разности координат узлов (например, второй стержень имеет длину равную $(4^2 + 3^2)^{1/2} = 5$ м), усилия от внешней нагрузки после предварительного нахождения реакций (рис. 3.6,б) определяются методом вырезания узлов, удлинения стержней подсчитываются по (3.14) с учетом заданной жесткости стержней, коэффициенты влияния - усилия от единичного нагружения определяются также способом вырезания узлов с учетом реакций опор (рис. 3.6,в).

В ы в о д: *Взаимное сближение по горизонтали точек A и B равно 0.16 м.*

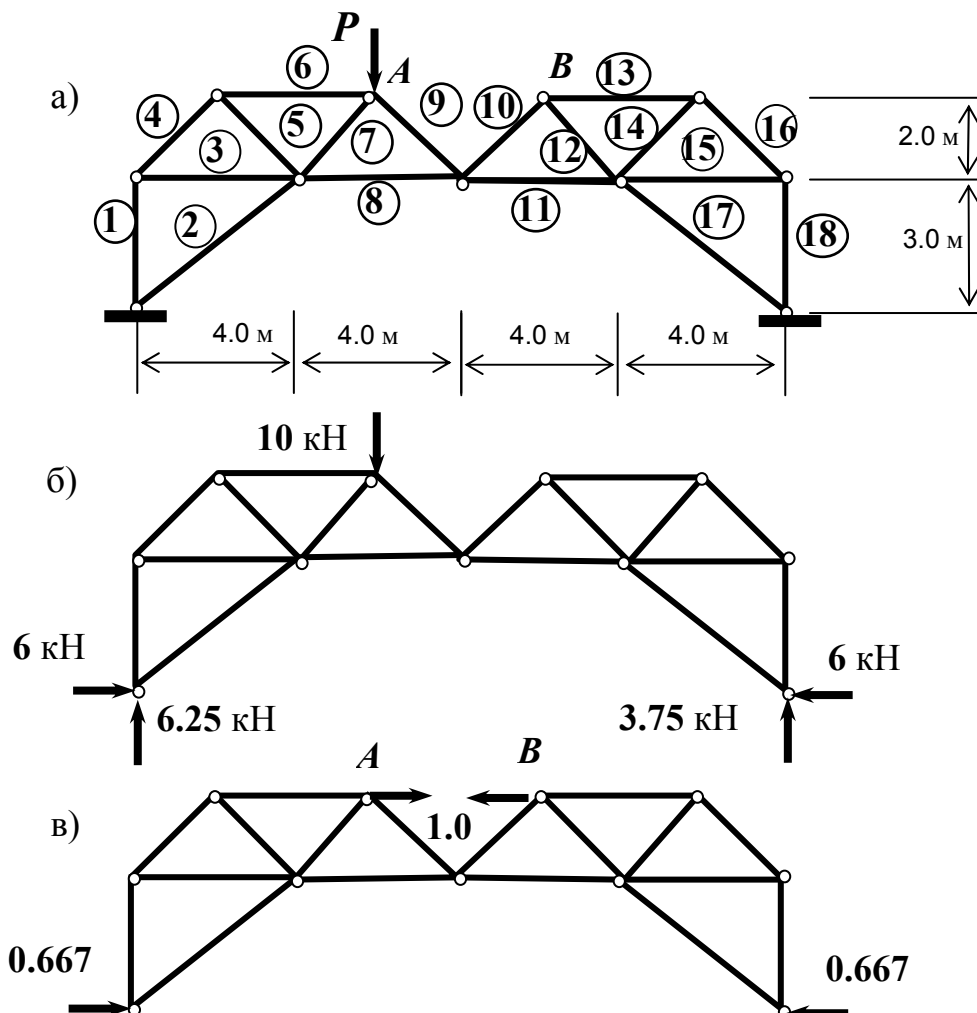


Рис. 3.6. Арочная ферма

а - схема фермы, б - грузовое состояние и реакции от внешней нагрузки,
 в - единичное состояние и реакции в опорах от единичной силы

Таблица 3.1

Вычисление удлинения стержней арочной фермы

и относительного смещения точек *A* и *B*

№, № стерж- ней <i>i</i>	Длины (м) <i>l_i</i>	Усилия от внешней нагрузки (кН)	Удлинения (м) $\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EA_i}$	Коэффициент влияния <i>N_i</i>	Составляющие перемещения (м) $\Delta l \cdot N_i$
1	3.0	1.75	0.004375	0.50000	0.0021875
2	5.0	-7.50	-0.031250	-0.83333	0.0260412
3	4.0	-1.75	-0.005833	-0.50000	0.0029167
4	2.83	2.47	0.005825	0.70711	0.0041247
5	2.83	-2.47	-0.005825	-0.70711	0.0041247
6	4.0	3.50	0.001167	1.00000	0.0011667
7	2.83	-8.85	-0.020871	0.00000	0.0000000
8	4.0	-3.75	-0.012500	-1.66667	0.0208333
9	2.83	-5.30	-0.012500	0.00000	0.0000000
10	2.83	5.30	0.012500	0.00000	0.0000000
11	4.0	-3.75	-0.012500	-1.66667	0.0208333
12	2.83	-5.30	-0.012500	0.00000	0.0000000
13	4.0	7.50	0.025000	1.00000	0.0250000
14	2.83	-5.30	-0.012500	-0.70711	0.0088388
15	4.0	-3.75	-0.012500	-0.50000	0.0062500
16	2.83	5.30	0.012500	0.70711	0.0088388
17	5.0	-7.50	-0.031750	-0.83333	0.0264583
18	3.0	3.75	0.009375	0.50000	0.0046875
					$\Sigma=0.1596016 \text{ м}$

Пример 3.4. (для самостоятельного решения). Определить полное перемещение узла *A*, вертикальное перемещение узла *B*, горизонтальное перемещение узла *C* и взаимное смещение узлов *C* и *D* в фермах, изображенных на рисунках 3.7-3.9.

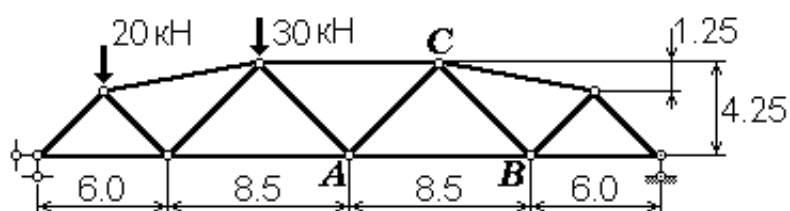


Рис. 3.7. Балочная ферма

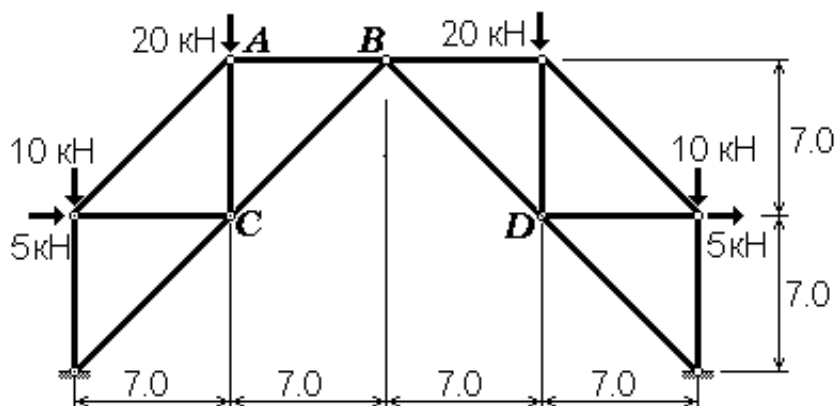


Рис. 3.8. Арочная ферма

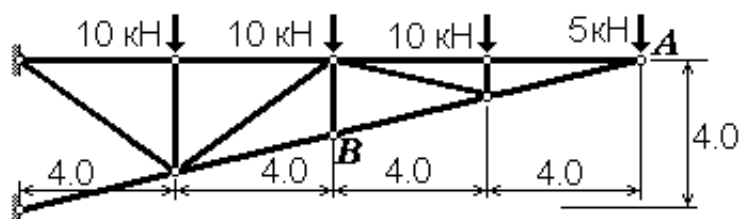


Рис. 3.9. Консольная ферма

3.4. Перемещения изгибаемых, искривляемых стержней

Основной характеристикой изгиба (вернее его появления) является изменение кривизны. Это изменение отражается на всем состоянии стержневой системы. Поэтому нашей задачей является изучение влияния изменения кривизны на искомое перемещение.

Возьмем, например, простую защемленную балку, изменение кривизны в которой произошло на малом участке dz (рис. 3.10). Тогда перемещение конца балки будет равно

$$d\delta_l = \frac{1}{\rho} dz(l-z) = \frac{Mdz}{EI}(l-z), \quad (3.21)$$

где $\frac{Mdz}{EI}$ - угол поворота сечения на расстоянии z от защемления, $\frac{M}{EI}$ - изменение кривизны стержня, $(l-z)$ - коэффициент влияния изменения кривизны на прогиб.

Если рассматривать изменение кривизны как функцию, зависящую от координаты z , то выражение $(l-z)$ можно представить как функцию

влияния изменения кривизны по длине стержня на прогиб в заданной точке (в нашем случае на конце стержня).

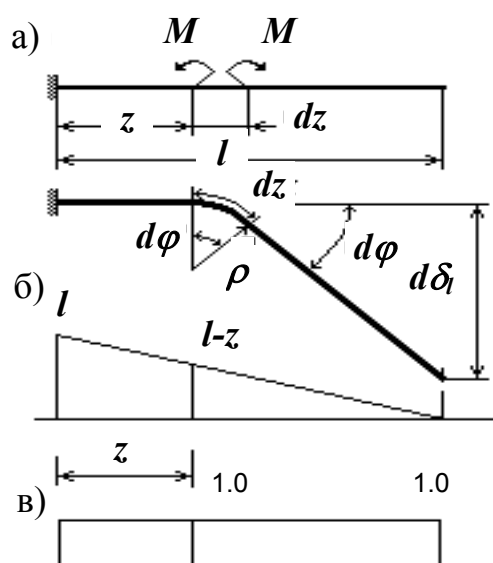


Рис. 3.10. Схема влияния изменения кривизны при изгибе на прогиб и угол поворота

а - схема балки,

б - функция влияния изменения кривизны на прогиб,

в - функция влияния на угол поворота

Если же требуется определить угол поворота конца стержня, то легко установить, что коэффициент влияния здесь равен единице, то есть

$$\frac{1}{\rho} dz = d\phi. \quad (3.22)$$

При заданной нагрузке изменение кривизны можно установить по изменению изгибающего момента от внешней нагрузки

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (3.23)$$

а, следовательно, полный прогиб вычислить интегрированием (3.21) произведения кривизны на функцию влияния

$$\delta = \int_0^l \frac{M}{EI} (l-z) dz.$$

Интегрированием (3.22) найдем угол поворота

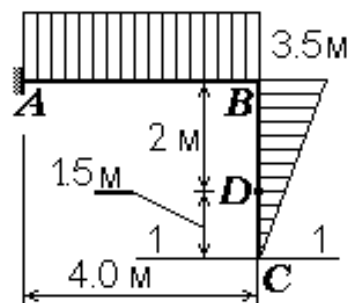
$$\phi = \int_0^l \frac{M}{EI} \cdot 1 \cdot dz.$$

Выводы по построению функции влияния в защемленной простой балке можно распространить на произвольную консольную систему.

Пример 3.6. Построить функцию влияния изменения кривизны для Г-образного стержня (рис. 3.11) при определении горизонтального перемещения его конца *C*.

Решение. Пусть линия 1 - 1 обозначает направление перемещения. По стержню *CB* расстояние до 1-1 меняется линейно. Все точки стержня *AB* находятся на одинаковом расстоянии от 1-1. График функции влияния показан на рисунке 3.11. Ординаты функции отложены от оси стержней.

Рис. 3.11. Г-образная рама
(заштрихована функция влияния изменения кривизны на горизонтальное перемещение точки *C*)

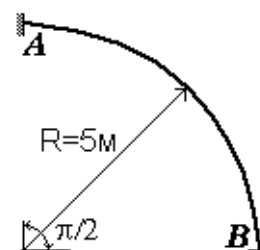


Пример 3.7. (для самостоятельного решения). Построить графики функций влияния горизонтального, вертикального прогибов и угла поворота сечения *D* (см. рис. 3.11).

Пример 3.8. (для самостоятельного решения). Построить функции влияния для перемещения конца кривого стержня (рис. 3.12) (вертикального и горизонтального).

Заметим, что все функции влияния, которые мы построили для предыдущих примеров, совпадают с эпюрой моментов от фиктивной (безразмерной) единичной силы, приложенной по заданному направлению. Таким образом, мы имеем аналог предложений Отто Мора для изгиба, но коэффициенты влияния здесь заменяются непрерывными функциями, которые совпадают с эпюрами изгибающих моментов от фиктивных единичных сил, приложенных в заданной точке по заданному направлению, то есть

Рис.3.12
Криволинейный стержень



$$\delta_{iP} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_{Pk}}{EI_k} M_{ik} dz, \quad (3.24)$$

где M_{Pk} - изгибающий момент на участке k от внешней нагрузки, EI - жесткость k -того участка, M_{ik} - функция влияния изменения кривизны

на k - том участке на перемещение по направлению i (суммирование проводится по всем участкам, на которых M_{Pk} и M_{ik} одновременно не равны нулю). Изгибаемые стержни входят в самые разнообразные сооружения. Это и балки, и рамы, и арки. Для лучшего закрепления идеи о влиянии изменения кривизны на перемещения разберем еще несколько примеров построения функций влияния.

Пример 3.9. Построить функцию влияния изменения кривизны стержня на прогиб в середине однопролетной (длина пролета l) балки (рис. 3.13)

Решение. Предположим, что изменение кривизны произошло в одной точке с координатой $z < a$. Тогда балка изогнется, как показано на рисунке 3.13,а. Изменение прогиба при этом равно $d\delta_{ip} = \frac{l}{2} d\varphi_2$.

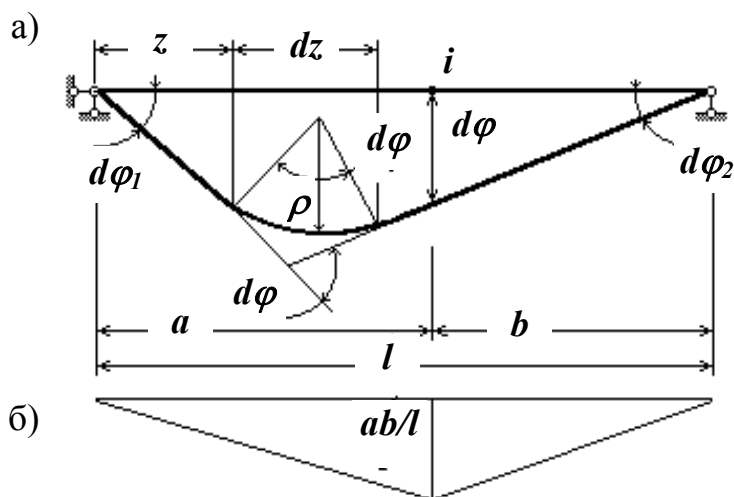


Рис.3.13. Однопролетная балка

а - схема балки и ее деформирование при изменении кривизны в сечении с координатой z :
б - функция влияния изменения кривизны на прогиб в точке i

Из геометрических соображений $d\varphi_1 = ((l-z)/l) d\varphi$, $d\varphi_2 = (z/l) d\varphi$,
поэтому (так как $d\varphi = \frac{dz}{\rho} = \frac{M}{EI} dz$) при $z < a$

$$d\delta_i = \frac{z}{l} \cdot b \cdot d\varphi = \frac{M}{EI} \frac{z}{l} \cdot b \cdot dz.$$

Таким образом, функция M_i влияния изменения кривизны на прогиб линейна

$$M_i = zb/l \quad (\text{при } z = a : M_i = ab/l).$$

Подобные рассуждения можно провести и при $z > a$

$$d\delta_i = \frac{M}{EI} \frac{(l-z)}{l} \cdot a \cdot dz.$$

При этом $M_i = (l-z) a / l$ (при $z = a : M_i = ab/l$).

Функция влияния показана на рисунке 3.13,б. Если построить эпюру моментов от фиктивной единичной вертикальной силы в точке i , то она будет совпадать с функцией влияния.

Пример 3.10. (для самостоятельного решения). Построить функцию влияния изменения кривизны на угол поворота в середине однопролетной балки. (Заметьте соответствие ее эпюре M от фиктивного единичного момента).

Выше построение функций влияния велось геометрическим способом. Но, как и в фермах, они могут быть определены и статическим способом. Эпюры изгибающих моментов от фиктивных единичных сил (сосредоточенных, если необходимо найти прогиб, линейное смещение и моментных, если требуется определить угол поворота или угловое смещение) по форме совпадают с этими функциями

В сложных случаях обычно отдается предпочтение статическому способу. Тем более, что построение эпюр - азбука строительной механики. Но нужно помнить, что ординаты функции влияния на прогибы - размерная величина, измеряемая в единицах длины, а функция влияния на углы поворота - безразмерная.

Пример 3.11. (для самостоятельного решения). Построить статическим способом функции влияния изменений кривизны на вертикальные прогибы в точках A , горизонтальные - в точках B , полные смещения в точках C , углы поворота сечений D , взаимные смещения C и E , взаимные углы поворота сечений D и G изгибаемых стержневых систем (рис. 3.14).

Указания. При определении взаимного смещения и взаимных поворотов сечений необходимо к соответствующим точкам приложить в противоположные стороны по направлению сближения (удаления) две фиктивные силы или два фиктивных момента.

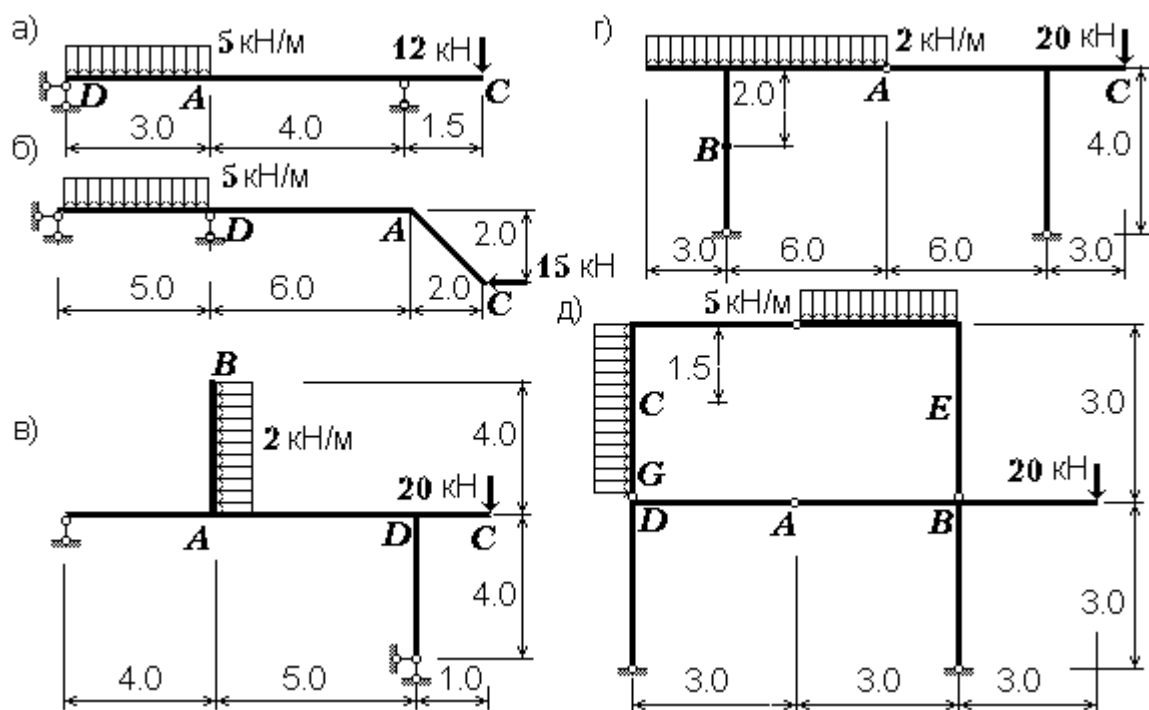


Рис. 3.14. Изгибаемые сооружения
а, б - балки; в, г, д - рамы

3.5. Вычисление перемещений от изгиба

На предварительном этапе решения задачи об определении перемещения заданной точки по заданному направлению (i) необходимо построить две функции

M_{Pk}/EI_k - функцию изменения кривизны стержня на участке k под действием внешней нагрузки,

M_{ik} - функцию влияния изменения кривизны на этом же участке стержня ($k=1, 2, \dots, n$) на заданное перемещение,

n - количество участков интегрирования.

Часто жесткость участков стержня постоянная или меняется скачками (от участка к участку), поэтому функцию изменения кривизны заменяют эпюрой изгибающих моментов от внешней нагрузки. И так как функция влияния, построенная статическим способом, также является эпюрой моментов только от единичной силы, то на предварительном этапе необходимо решить азбучную задачу строительной механики.

Перемещение определяется интегрированием произведения

$$\text{функций } M_{Pk}/EI_k \text{ и } M_{ik}: \quad \delta_{iP} = \sum_{k=1}^n \int_0^{l_k} \frac{M_{Pk} \cdot M_{ik}}{EI_k} dz \quad (3.25)$$

Непосредственное интегрирование (3.25) требует составления аналитического выражения функций M_{Pk}/EI_k и M_{ik} в зависимости от z и применения правил взятия интегралов. Эта операция часто очень трудоемкая и не универсальна. Правила численного интегрирования позволяют ее упростить.

Воспользуемся одним из способов численного интегрирования³ - способом Симпсона. Интервал интегрирования при этом разбивается на участки, подынтегральное выражение аппроксимируется квадратными параболой. Так как каждая парабола проводится через три соседние точки - границы участков, число участков должно быть четным (минимальное их количество - два). Способ Симпсона независимо от числа участков дает точный результат, если подынтегральная функция - полином третьей степени.

Если стержень постоянной жесткости прямолинеен и загружен равномерно распределенной нагрузкой, то функция изменения кривизны является квадратной параболой, функция влияния - линейна, а произведение их - полином третьей степени. Поэтому интервал интегрирования - длину стержня - разобьем на минимальное количество участков или разделим ее пополам. Подынтегральную функцию вычислим в начале, в середине и в конце интервала, заменив интеграл в (3.25) на численный аналог, получим известную в практике расчетов формулу

$$\delta_{iP} = \sum_{k=1}^n \frac{l_k}{6EI} \cdot (M_{Pk}'' \cdot M_{ik}'' + 4 \cdot M_{Pk}^c \cdot M_{ik}^c + M_{Pk}^K \cdot M_{ik}^K) \quad (3.26)$$

В ней: M_{Pk}'' , M_{Pk}^c , M_{Pk}^K - изгибающие моменты на участке k от внешней нагрузки соответственно в начале, середине и конце его;

M_{ik}'' , M_{ik}^c , M_{ik}^K - величина функции влияния на перемещение по направлению i соответственно в начале, середине и конце участка k .

Пример 3.12. Определить расстояние между опорами Г-образных стоек - держателей шаров разрядного устройства (рис. 3.15), если по технологическим требованиям расстояние между поверхностью шаров после их навески на держатели должно быть **40** см (с точностью до 1 мм). Масса шаров **80** кг. Жесткость стоек $EI = 7.86$ кНм².

Решение. После навески на держатели шаров опоры будут стремиться сблизиться. На величину этого сближения необходимо увеличить расстояние между стойками.

³ Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1974

Определим это сближение - δ_{ip} . Выполним подготовительный этап. Построим эпюру M_p и функцию влияния M_i от двух сил по направлению сближения (рис. 3.15).

Взаимное сближение равно (по (3.26)) при двух одинаковых участках

$$2 \cdot \delta_{ip} = 2 \cdot 1.5 (0 \cdot 0.8 + 4 \cdot 0.75 \cdot 0.8 + 1.5 \cdot 0.8) / (6 \cdot 7.86) = 0.228 \pm 0.001 \text{ м}$$

Следовательно, расстояние между стойками должно быть равно (рис. 3.15, а)

$$l = (1.0 + 0.3) 2 + 0.4 + 0.228 = 3.228 \pm 0.001 \text{ м.}$$

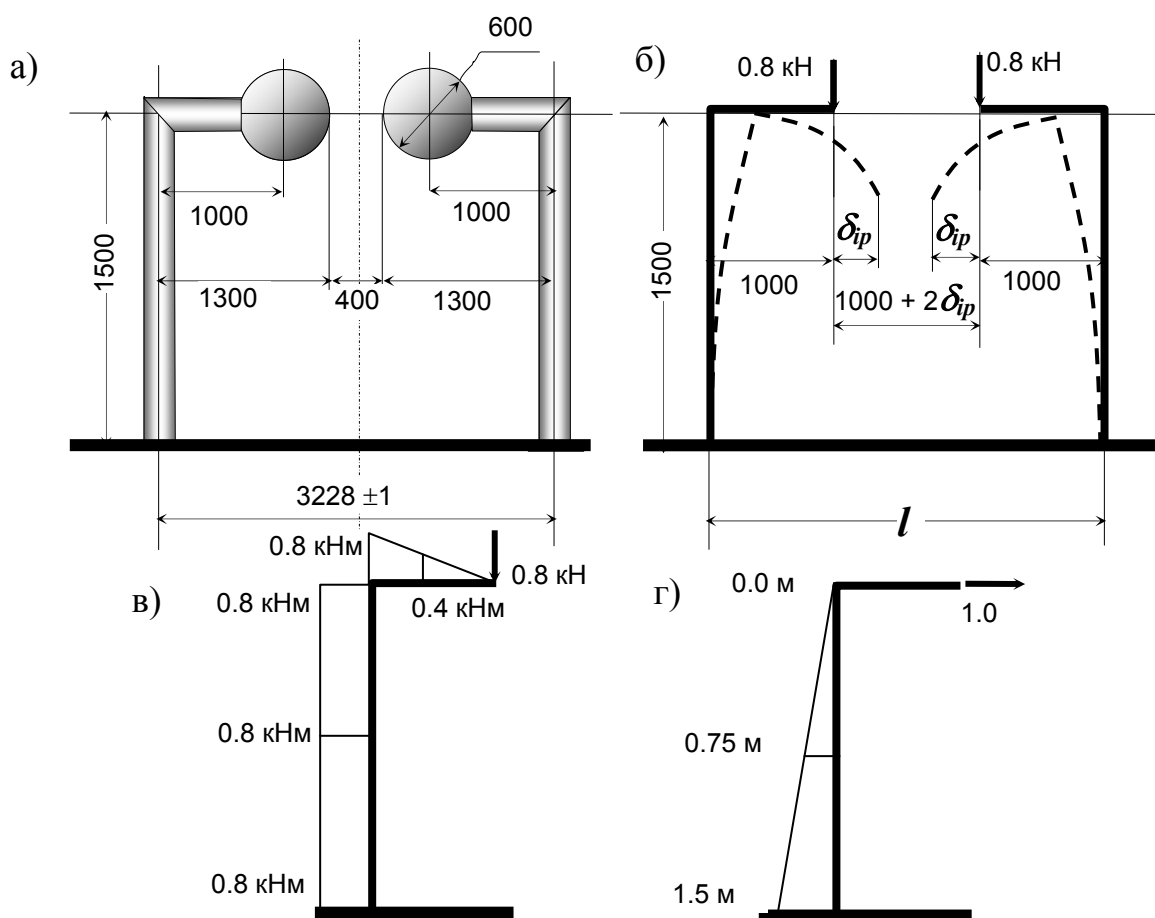


Рис. 3.15. Разрядное устройство испытательного стенда

а - конструкция устройства, б – форма изгиба стоек,

в - эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки на левой стойке,

г - функция влияния изменения кривизны на сближение шаров на левой стойке
(эпюра изгибающих моментов от единичной силы)

Пример 3.13. Определить отклонение верха здания высотой 60 м при ветровой нагрузке. Ветровая нагрузка воспринимается ядром (рис. 3.16), выполненным из восьми круглых колонн диаметром 1.5 м. Изготовлены колонны из трубобетона (металлическая труба, заполненная

бетоном). Момент инерции каждой из них равен $I_x = 0.5 \text{ м}^4$ со средним модулем упругости $E = 20 \text{ ГПа}$. Чтобы обеспечить комфортность работающих на верхнем этаже людей прогиб не должен превышать $\delta_{np} = 0.1 \div 0.3 \text{ м}$.

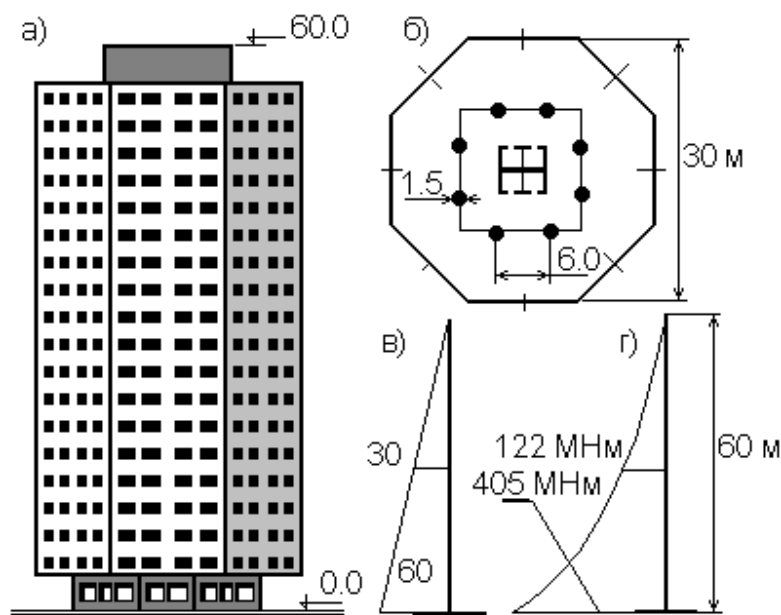


Рис. 3.16. Высотное здание
а - фасад, б - план,
в - функция влияния
изменения кривизны на
прогиб верха здания,
г-эпюра изгибающих
моментов от ветровой
нагрузки

Решение. Жесткость столба в направлении изгиба (оси x) с учетом расстановки колонн (площадь каждой из них равна $A = 1.77 \text{ м}^2$).

$EI_x = (8 \cdot 0.5 + 1.77 (4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 7.25^2)) \cdot 20 = 8800 \text{ ГНм}^2 = 88 \cdot 10^{11} \text{ Нм}^2$.
Эпюры изгибающих моментов от внешней нагрузки и от единичной силы в направлении искомого перемещения показаны на рисунке 3.16, в, г.

$$\delta_{ip} = 60 \cdot (405000 \cdot 60 + 4 \cdot 122000 \cdot 30 + 0 \cdot 0) / (6 \cdot 88 \cdot 10^8) = 0.0442 \text{ м} < \delta_{np} = 0.1 \div 0.3 \text{ м}.$$

Пример 3.14 (для самостоятельного решения). Определить максимальное отклонение поверхности параболической антенны телевизионного приема при положении ее в зенит (рис. 3.17). Основная несущая конструкция восьми лепестковая звезда, выполненная из стального сварного двутавра переменной жесткости. Нагрузка от снега 2.6 кН/м^2 горизонтальной проекции (модуль упругости стали $E = 200 \text{ ГПа}$).

Пример 3.15. Определить реакции дополнительной концевой опоры консольной балки при действии на нее равномерно распределенной нагрузки.

Решение. Дополнительное уравнение по смыслу соответствует закреплению конца консоли (он неподвижен, см. рис. 3.18, б, в)

$$\Delta_{IP} + \Delta_{II} = 0 \quad (3.27)$$

Представим перемещение в виде произведения

$$\Delta_{II} = \delta_{II} \cdot X_I,$$

где δ_{II} - перемещение от $X_I = 1$.

Построив грузовые эпюры и функции влияния (см. рис. 3.18,г,д), определим перемещения

$$\Delta_{IP} = l \cdot (0 \cdot 0 - 4 \cdot (ql^2/8) \cdot (l/2) - (ql^2/2) \cdot l) / (6 \cdot EI) = -ql^4 / (8 \cdot EI)$$

и

$$\Delta_{II} = l \cdot (0 \cdot 0 + 4 \cdot (l/2) \cdot (l/2) + l \cdot l) / (6 \cdot EI) = l^3 / (3 \cdot EI).$$

Из (3.27) получаем реакцию в дополнительной опоре

$$X_I = -\Delta_{IP} / \Delta_{II} = 3 \cdot ql / 8.$$

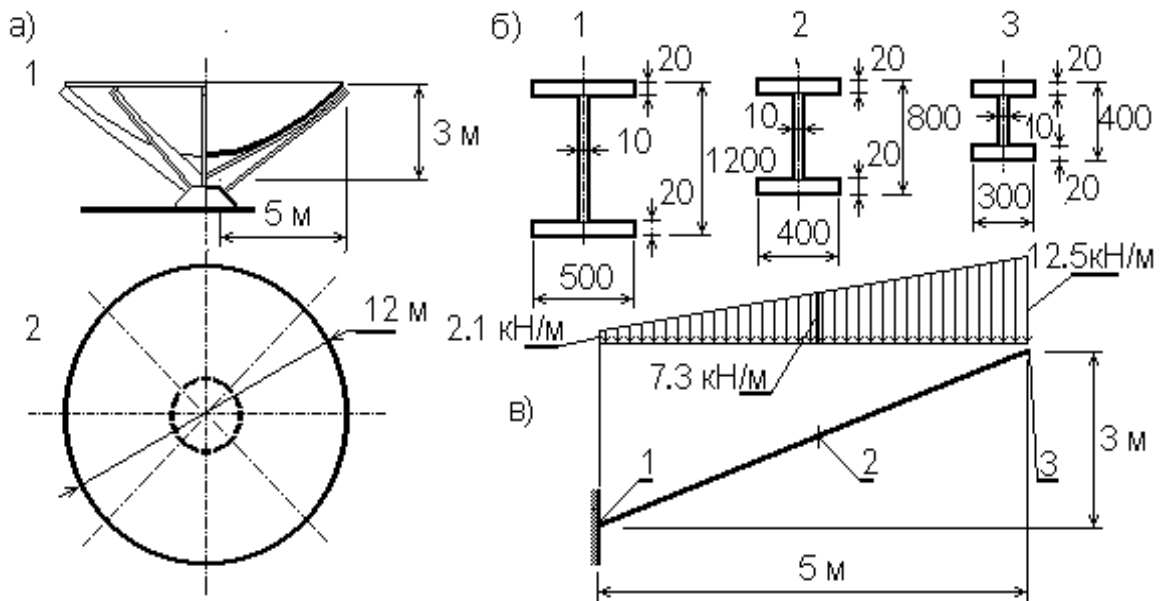


Рис. 3.17. Приемная антенна

а - положение антенны в зенит (1 - фасад, 2 - план);

б - сечения лепестка (1 - у опоры, 2 - в середине, 3 - на конце);

в - схема загрузки лепестка звезды

Пример 3.16 (для самостоятельного решения) Определить величину сосредоточенной силы, которую нужно приложить в середине консольной балки, чтобы прогиб ее конца был равен 2 см. Вылет консоли - 6 м, изгибная жесткость стержня - 20 МН м².

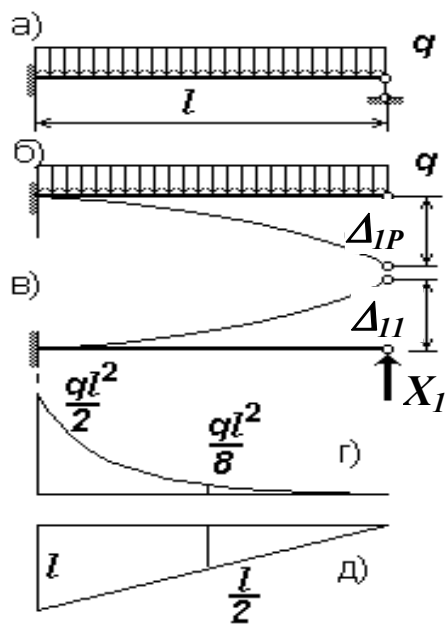


Рис. 3.18. Консольная балка с опорой на конце

а - схема балки,
 б - схема деформации балки от внешней нагрузки,
 в - тоже от реакции в концевой опоре,
 г-эпюра изгибающих моментов от внешней нагрузки,
 д - тоже от единичной реакции в опоре.